

叶轮机械迴转面流场的有限元近似解 方法的研究和数值计算

谷传纲 桂利川 常鸿寿
(西安交通大学)

提要 本文提出一种新的概念:即在应用有限元处理不同类型的流体力学、传热学问题时,应该根据各自问题的物理本质,采用不同型式的基函数(shape function),并在文[1]的基础上,应用有限元近似解方法(FEAM)对直角弯管流动进行了数值计算和精度分析,还对带长短叶片的前向离心通风机的迴转面流场进行了数值计算和分析,在迴转面流场计算中采用了一种新的简化方法,解决了在非矩形单元上求取近似解的困难,计算结果表明在稀疏网格下能保持较高精度,从而明显地提高了计算速度。

关键词 有限元分析, 通风机, 计算流体力学。

1. 前言

近十几年来,有限元法在流体力学、传热学和叶轮机械气动力学中获得日益广泛的应用,然而这些领域中的问题各具有本身的特殊性:如由不同类型的微分方程所支配的流动现象(如椭圆型、抛物型和双曲型)带来依赖区和影响区的问题;又如对于由对流和扩散所支配的流动现象,带来顺流向和逆流的影响程度不同等问题。所以从流场某一微元的局部性质来看,仅仅沿用有限元法原有的基函数,进行部分插值是难以描述各种不同问题的局部流动本质的。这是因为这些基函数(一般用线性、二次函数,很少用到三次以上,也有用样条函数等等)都是从插值的概念出发,而没有顾及不同类型问题的局部物理本质——即某个单元上各节点之间的物理联系。因此,尽管从整体而言,控制方程已经描述整个物理现象,但在各个微元上,采用同一形式的基函数所建立的各节点之间的关系并不能总是正确地描述出物理上的联系。在有限差分法中人们提出各种不同的差分格式^[1],在有限解析法中采用解析解,来适应各种不同类型的问题,其目的就是为了满足不同问题的局部性质。我们认为,为了使有限元法能更顺利地求解不同类型的流动、传热问题,应抛弃原来采用某一固定型式的基函数的作法,而代之以采用一些新的修正基函数,而它们又能在一定程度上大致地反映和描述这些流动和传热问题的局部物理性质。这样能使有限元法得到更进一步的发展。

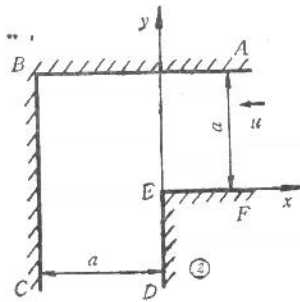
1984年文[1]提出这种概念的初步想法,并建立了有限元近似解方法的基本理论和

进行了初步的计算,显示出这种新方法的优越性。

有限元近似解方法是有限元方法与单元上的近似解方法的结合。它是在有限元法的基础上,对原基函数进行改造,即在单元上求取近似解来逼近方程解,并以此作为新的修正基函数。因此,该法既保持原有限元法的优点,又能较好地满足不同类型问题的局部性质。该法理论基础和特点在文[1]已有论述,在此不再赘述。本文对该法进行了进一步研究并将其应用于叶轮机机械迴转面流动的数值计算中。

2. 直角弯管流场计算及与精确解的比较

直角弯管流动如图 1 所示,来流均匀、平行,其值 $u = 1$ 。管道宽度 $a = 1$ 。用 Schueaz-Christoffel 变换,求得该流动的复势函数为:



$$\chi = \phi + i\psi = \frac{1}{\pi} \ln \zeta$$

$$z = -\frac{i}{\pi} \left[\operatorname{arcch} \zeta + \arccos \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right] - (1 - i)$$

另外分别用有限元法 (FEM) 和有限元近似解方法 (FEAM) 对此进行计算。流函数方程为:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

图 1 直角弯管流场

计算中,采用具有曲线边界的 8 节点等参数元,网格为自动划分生成。在有限元法中,单元上用二次插值函数,而在有限元近似解方法中单元上采用由单元近似解得到的修正基函数 $\bar{N}_i(x, y)$ (详见文 [1] 式(7))。下面将 $\phi = 0.5$ 的流线坐标进行比较 (表 1), 该相对误差是指计算值与精确解在同一 x 坐标值下的 y 值的偏差。

其精度分析如下: 式(1)为 Laplace 方程,即文[1]式(8)中 $A = B = 0$ 。此时用原有限元法的 8 节点二次插值的基函数所计算的单元中心点 P 的函数值为式(2) (见图 2)

表 1

| x \ y | 有限元近似解方法 FEAM | | 有限元法 FEM | | 精确解 |
|-------|---------------|-----------|----------|-----------|----------|
| | 数值 | 与精确解的相对误差 | 数值 | 与精确解的相对误差 | 数值 |
| 1.2a | 0.5 | 0 | 0.5 | 0 | 0.5 |
| 0.43a | 0.490833 | 0.16% | 0.49 | 0.32% | 0.491666 |
| 0.27a | 0.451666 | 0.36% | 0.45 | 0.72% | 0.45333 |
| 0.05a | 0.401666 | 3.6% | 0.38833 | 6.8% | 0.41666 |
| 0.0a | 0.39333 | 2.4% | 0.3733 | 7.1% | 0.40333 |
| -0.1a | 0.355 | 8.4% | 0.3333 | 12% | 0.38 |
| -0.2a | 0.325 | 6.5% | 0.30833 | 13% | 0.355 |

(式(2)是式子 $\phi_P = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot \phi_i$ 的约定图示法,表示 P 点受周围 8 点的影响程度)。式(2)表示 P 点的 ϕ_P 值受四周 8 点的均匀影响,中间四点为正影响,四角点是负影响。显然这

在物理意义上是难以理解的。式(3)为本文的计算值。它表示 P 点的 ϕ_P 值受到周围 8 点的正的均匀影响, 这是符合拉普拉斯方程的物理意义的。式(4)为有限解析法 (FAM)^[3] 的精确解结果, 精度达 $O(h^6)$ 。式(5)为 Greenspan 的九点差分格式^[6]的结果。以上四式如图 2 所示。从中可知, 有限元近似解方法 (FEAM) 具有较高的精度。所以在同样的网格布置情况下, FEAM 可比 FEM 得到更高的精度 (如表 1 所示)。反之在同一精度的要求下, FEAM 法可采用较稀疏的网格。

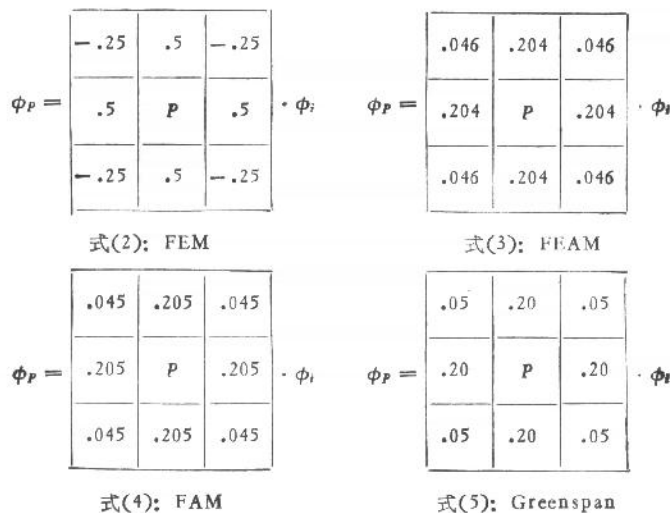


图 2 各种方法的比较

3. 叶轮机械迴转面流场的计算

本文将有限元近似解方法用于带长短叶片的离心通风机迴转面流场(势函数形式)的计算(见图 3)。假定流动为无粘, 绝热, 相对定常。在任意迴转面上取 $l-\varphi$ 坐标。网格划分如图 4 所示。其中 54 和 $5'4'$ 为割缝。其控制方程为^[2,3]

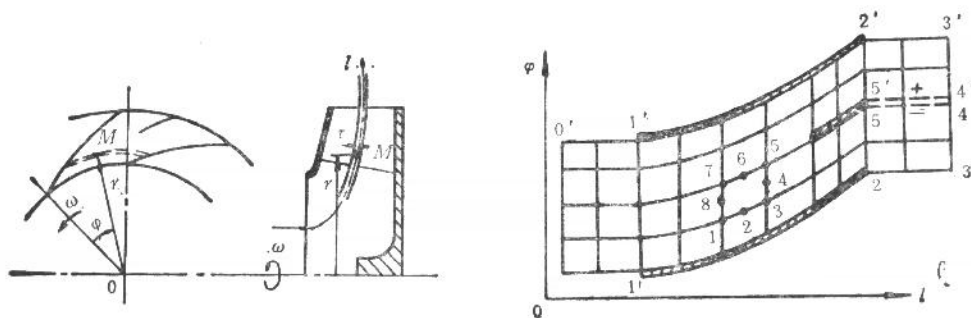


图 3 长短叶片通风机叶轮示意图

图 4 $l-\varphi$ 迴转面

$$\frac{\partial \left[\tau r \rho \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right]}{\partial l} + \frac{\partial \left[\tau \rho \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \Lambda_u \right) \right]}{\partial \varphi} = 0 \quad (6)$$

其中

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \Lambda_l \quad \frac{\partial \Phi}{r \partial \phi} = \Lambda_\phi + \Lambda_u$$

边界条件: 在 $\overline{00'}$ 和 $\overline{33'}$ 上为进出口边界, 假定气流参数均匀, 进口为已知; 叶片表面上 $W_n = 0$; $\overline{01}$ 与 $\overline{0'1'}$, $\overline{23}$ 与 $\overline{2'3'}$ 为周期性边条; $\overline{54}$ 和 $\overline{5'4'}$ 为割缝条件。

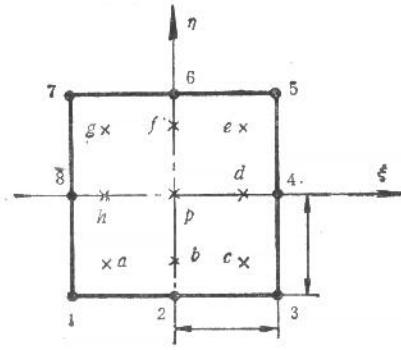


图 5 $\xi-\eta$ 平面

仍采用 8 节点等参数元, 所以用有限元近似解方法求解此流场时, 需要求取在 $\xi-\eta$ 平面上的修正基函数。在如图 4 所示的非矩形计算区域中, 一般需要在各个单元上分别求取近似解 (类似在有限解析法中亦需求取每个单元上的近似解), 这将大大增加计算工作量。所以, 本文采用一种简化近似方法: 即假定在通风机中 ρ 不变, 并认为每个单元的形状在 $l-\phi$ 坐标中近似为平行四边形, 那么从图 4 中 $l-\phi$ 平面上单元转换至图 5 $\xi-\eta$ 平面的标准单元的变换为:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{l - l_2}{H} \\ \eta &= \frac{\varphi - \left[\frac{\phi_4 - \phi_3}{2H} (l - l_2) + (\varphi_6 + \varphi_2)/2 \right]}{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中

$$H = \frac{1}{2} (l_3 - l_1), \quad \theta = \frac{1}{2} (\phi_5 - \phi_2)$$

方程(6)通过式(7)转换至 $\xi-\eta$ 平面上, 得到

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + c \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + d \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{\phi_3 - \phi_4}{\theta}, \quad b = \left(\frac{\phi_3 - \phi_4}{2\theta} \right)^2 + \left(\frac{H}{r_2 \theta} \right)^2 \\ c &= \frac{\varepsilon H}{r_2}, \quad d = \frac{\varepsilon H (\phi_4 - \phi_3)}{2\theta r_2}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta r}{\Delta l} \end{aligned}$$

然后用文[11]所述的方法使单元内部九点(见图 5)满足方程(8), 从而得到修正基函数:

$$\bar{N}_i(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) - \sum_{j=1}^9 b_{ji} f_j(\xi, \eta) \quad (9)$$

其中, b_{ji} 为系数, f_j 取文[1]式(4)。

在如图 4 所示的沿周向均分网格的情况下, 每排单元(即具有相同 l 值)形状基本相同, 所以对一排单元取一个相同的修正基函数, 这大大减少了计算工作量。由于计算修正基函数仅是一些代数运算, 因此仅使计算机程序多了一个子程序和增加了一些贮存修正

基函数数值的单元,对计算机时并无明显增加。

4. 结果与分析

我们对一台前向式离心通风机(1号)和一台带长短叶片的前向离心通风机(2号)进

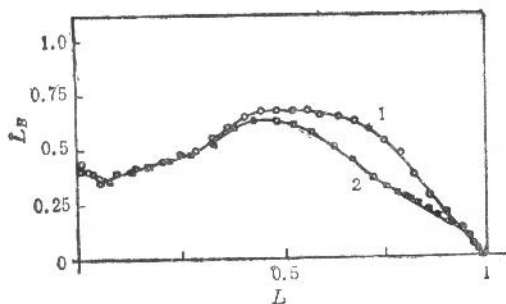


图 6 叶片表面速度分布
1,○—无短叶片 2,□—有短叶片

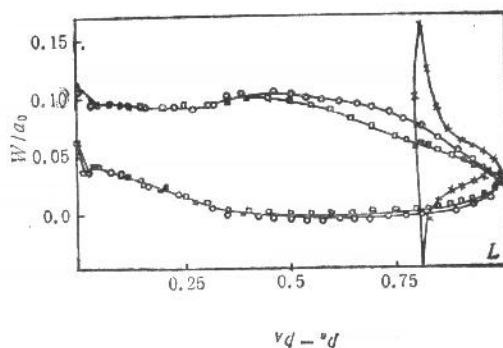


图 7 长叶片负荷分布
○—1号轮,无短片 □—2号轮,主叶片
×—2号轮,短叶片

行了数值计算。其速度分布和长叶片上负荷分布分别如图 6、7 所示。结果表明在具有短叶片时,长叶片的后部负荷有所降低,这可以改善长叶片后部的流动情形,但由于增加了短叶片,所以具有长短叶片的 2 号叶轮的总负荷增大,这个结果可以由实验结果得到证实,如图 8 所示的两叶轮的总压系数实验值正反映了这一点。在计算中,由于有限元近似解方法具有较高精度,我们取 44 个单元,163 个节点,就可以得到用原有限元法取 396 个单元,1279 点时的精度。所以大大提高了计算速度,同时与实验比较也表明计算是合理的。与其他文献^[9]结果类似。我们还用此算法求解了具有不同长度,不同圆周位置,不同安装角的短叶片的叶轮迴转面流场,均得到与实验相应的结果。

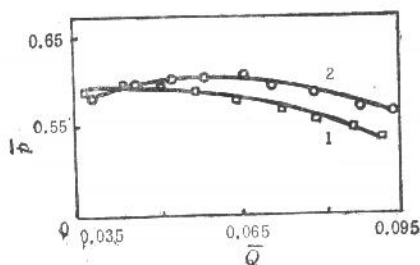


图 8 两叶轮总压曲线
1—无短叶片 2—有短叶片

5. 结论

本文在文[1]的基础上,对有限元近似解方法作了进一步的研究。通过几个算例的计算和分析,我们得到一些结论:

1. 有限元近似解方法既能保持原有限元法的优点,又能通过对不同类型特点的问题采用不同的修正基函数,因此该法能提高求解精度或在保持一定的精度下采用较稀疏的网格。
2. 本文所采用的近似简化求取叶轮机械迴转面流场单元的修正基函数的方法是有效、方便的。其思想可以推广至其他问题的处理上。
3. 有限元近似解方法能很好地求解带长短叶片的离心通风机迴转面流场。

参 考 文 献

- [1] 谷传纲,有限元近似解方法的理论与应用,力学学报,16,6(1984).
- [2] 刘高联,力学学报,11,4(1979).
- [3] 陈康民,工程热物理学报,4(1982).
- [4] Chen, C. J. and Li, P., ASME 80-HT-86 (1980).
- [5] Chen, C. J., *J. of Numerical Heat Transfer*, 4, (1981).
- [6] Greenspan, D., *J. of Franklin Institute*, 263 (1957).
- [7] 谷传纲,苗永焱, Proc. of International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Iowa, U. S. A. (1985).

ADVANCED STUDY OF FINITE ELEMENT APPROXIMATE SOLUTION METHOD (FEASM) AND CALCULATION OF STREAM-SHEET OF REVOLUTION

Gu Chuangang, Gui Lichuan, Chang Hongshou

(Xi'an Jiaotong University)

Abstract The paper describes a new concept: it is necessary to use a corresponding type of modified shape function on based of physical meaning of different problems when we treat fluid mechanics or heat-transfer problems using the Finite Element Method (FEM). And, using the Finite Element Approximate Solution Method (FEASM) proposed by Gu (1984, Ref. 1), we calculated the flow field of a square bend duct and one of stream-sheet of revolution in a forward centrifugal fan with or without splitter blades. A simplified method has been utilized to overcome the difficulty of seeking the approximate solution on the non-rectangle element. The results show that the computational speed and accuracy can be raised by FEASM.

Key words element analysis, turbo-fan, computational fluid mechanics.